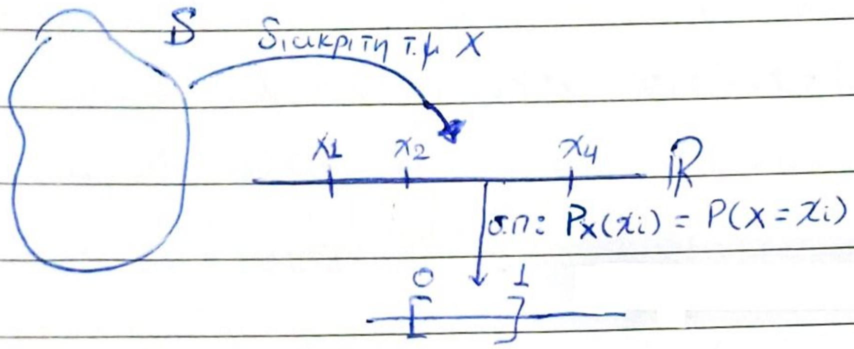
12/11/19



• Σχέση μεταξύ α.σ.κ F_X και σ.π P_X:

Έστω διακριτή τμ X με τιμές $x_1, \dots, x_n, \dots$ και γνωστή σ.π $P_X(x)$, δηλαδή $P_X(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

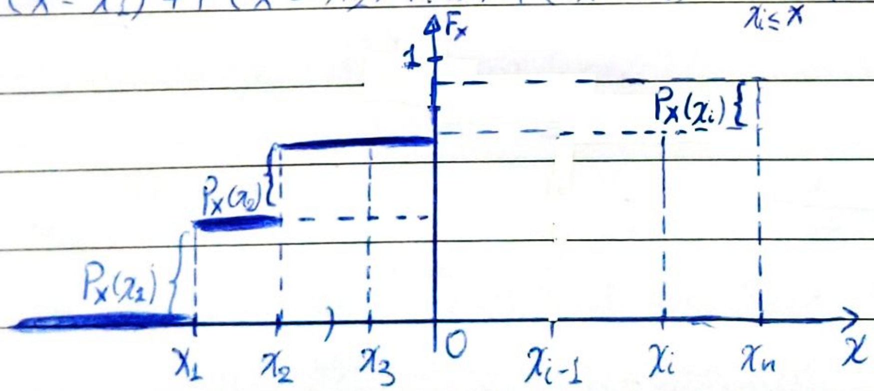
Μπορώ να βρώ την α.σ.κ F_X της X;

Η α.σ.κ F_X ορίζεται για κάθε τιμή x, $F_X(x) = P(X \le x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Αν $x < x_1$, τότε $F_X(x) = P(X \le x) = P(\emptyset) = 0$

Αν $x_i \le x \le x_{i+1}$, τότε $F_X(x) = P(X \le x) = P(X = x_1 \text{ ή } X = x_2 \text{ ή} \dots \text{ή } X = x_i) =$

$= P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} P_X(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$



Η α.σ.κ μιας διακριτής τμ είναι πάντοτε μια κλιμακωτή συνάρτηση με άλματα (σημεία ασυνέχειας) τις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ της τ.μ και άλματα ίσα με $P_X(x_i)$ στις τιμές x_i, $i=1,\dots,n,\dots$

Αντίστροφα:

Αν ξέρω την α.σ.κ μπορώ να βρω την σ.π;

Έστω διακριτή τ.μ X με τιμές $x_1, \dots, x_n, \dots$ και γνωστή α.σ.κ $F_X(x)$.

$$P_X(x_i) \overset{\text{op}}{=} P(X=x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i^-) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

Συνεχείς τ.μ - Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (σππ)

Πρώτη προσέγγιση του ορισμού συνεχούς τ.μ: Εκείνη που το σύνολο τιμών της είναι υπεραριθμήσιμο, δηλαδή $\subseteq \mathbb{R}$ ή $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα:

θεωρητικά

Έστω χρόνος ζωής έμβιου όντως ή αντικειμένου με τιμές $(0,\infty)$.
Μπορεί να υιοθετηθεί το οικοδόμημα (η σπ) των διακριτών τμ στη συνεχή περίπτωση;

Έστω συνεχής τμ X που παριστά το βάρος ενός νεογέννητου. Η X έχει τιμές $(0,\infty)$ ή ας είμαστε ρεαλιστές: $X \in (1,6)$. Μπορώ να ορίσω συνάρτηση πιθανότητας για το βάρος X;

Έστω ότι μπορώ.

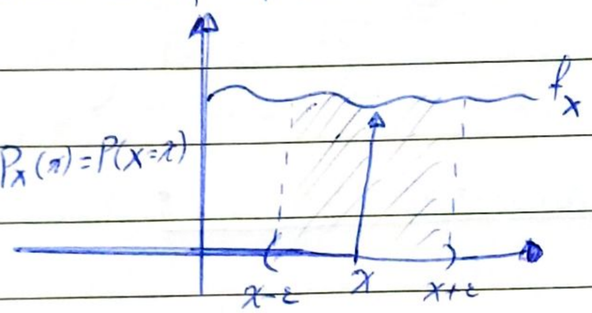
$$P_X(4) = P(X = 4\,kg) = \frac{1}{\infty} \quad (=0)$$

Απαράδεκτη η σκέψη μου να μεταφέρω το οικοδόμημα της διακριτής στη συνεχή περίπτωση.

Στη συνεχή περίπτωση δεν έχει νόημα να αναζητώ η συνεχής τμ να παίρνει τιμές συγκεκριμένες αλλά έχει νόημα να αναζητώ πιθανότητα η συνεχής τμ να παίρνει τιμές σε ένα διάστημα οσοδήποτε μικρό γύρω από κάποια συγκεκριμένη τιμή.

Ερώτημα: Μπορώ να υπολογίσω πιθανότητα διαστήματος; Πως υπολογίζεται $P(x-\varepsilon \le X \le x+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ όταν X συνεχής;

Αν η X ήταν διακριτή:



Ορισμός: Έστω τμ X. Η X ονομάζεται συνεχής τ.μ αν υπάρχει μία μη αρνητική, ολοκληρώσιμη συνάρτηση f_X ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τω $P(X\in B)=\int_B f_X(x)\,dx \quad \forall B\subseteq\mathbb{R}$ (*). Η f_X ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας

Συνέπειες ορισμού:

1) Αν $B=(a,\beta)\subseteq\mathbb{R}$, τότε $P(X\in B)=P(a<X<\beta)\overset{(*)}{=}\int_a^\beta f_X(x)\,dx$

2) Έστω $B=(-\infty,x)$, $x\in\mathbb{R}$, τότε $P(X\in B)=P(-\infty<X\le x)=P(X\le x)\overset{\text{ορ}}{=}$
$= F_X(x)\overset{(*)}{=}\int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα, αν γνωρίζω την f_X, μπορώ να βρω την F_X.

Επιπλέον (από 2)

i) Το $\int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt$ είναι συνεχής συνάρτηση x, $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα η F_X

συνεχούς τμ X είναι παντού συνεχής.

ii) $\frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \Rightarrow \frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x)$

Άρα αν γνωρίζω την ασκ F_X, μπορώ να βρω τη σππ f_X

Παρατήρηση: Για συνεχή τμ X (η ασκ είναι παντού συνεχής) ισχύει

$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha) \overset{(*)}{=}$
$= \int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)dx$

3) Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$. Άρα

$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1}$

Βασική ιδιότητα της σππ

Συγκεντρωτικά για την σππ ισχύουν:

i) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

- Απαραίτητες συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιεί μία πραγματική συνάρτηση για να είναι σππ.

Άσκηση: (SOS)

Έστω η τμ X με σππ $f_X(x) = \begin{cases} c\cdot e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \quad c > 0$

α) Βρείτε την τιμή του c.

β) Προσδιορίστε την $F_X(x)$.

γ) Υπολογίστε τις $P(1 < X < 2)$, $P(X < 2)$, $P(X \geq 2)$, $P(X < 1)$.

Λύση:

(Πάντα σε τέτοιου είδους παραδείγματα αξιοποιούμε την ii)

α)

$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{0}^{+\infty} c\cdot e^{-x}dx = -c\left[e^{-x}\right]_0^{\infty} = -c(0-1) = c$

Άρα, $c = 1$

β)

$$F_X(x) \overset{\text{op}}{=} P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt = 0, & x \le 0 \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_X(t)\,dt \end{cases} =$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{-\infty}^{x} e^{-t}\,dt, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

γ)

$$P(1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(1) =$$

$$= F_X(2) - F_X(1)$$
$$= (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1})$$
$$= e^{-1} - e^{-2}$$

$$= \int_{1}^{2} f_X(x)\,dx = \int_{1}^{2} e^{-x}\,dx =$$
$$= \dots = e^{-1} - e^{-2}$$